DERIVADAS

Derivadas_resumo.odt

Prof. Alexandre Ortiz Calvão

Derivada de uma função. A derivada de f em x é dada por

$$f'(x)=\text{Lim}_{\Delta x \to 0} [f(x+\Delta x)-f(x)]/\Delta x$$

desde que o limite exista.

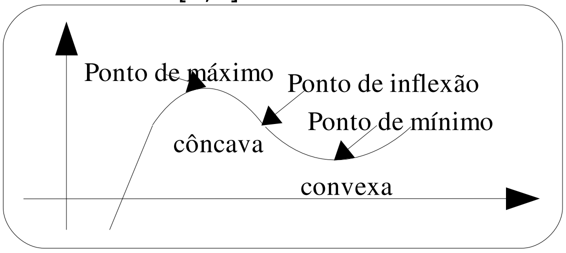
Derivada de f(x) no ponto a é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (a,f(a))

$$f'(a)=\text{Lim}_{\Delta x \to 0} [f(a+\Delta x)-f(a)]/\Delta x$$

e determina a taxa de variação instantânea de f em a.

Taxa de variação média de f em [a,b] = [f(b)-f(a)]/(b-a)

Esta relação é a inclinação da reta secante de f(x) em um intervalo [a,b].



As **unidades de f'(x)** são: Unidades de f(x)/Unidades de x.

DIFERENCIAÇÃO IMPLÍCITA. Se y está definida implicitamente por uma equação como função de x, então, para calcular dy/dx devemos diferenciar a equação(lembrando de aplicar a regra da cadeia)

$$(d/dx)f(g(x))=f'(g(x)).g'(x)$$

Informações dadas pela derivada

Primeira derivada

- Se f'>0 em um intervalo, então f é crescente nesse intervalo.
-Se f'<0 em um intervalo, então f é decrescente nesse intervalo.

Segunda derivada

- Se f''>0 em um intervalo, então f é convexa, nesse intervalo. (côncava para cima)
- Se f''<0 em um intervalo, então f é côncava, nesse intervalo. (côncava para baixo)

Linearidade local

- A reta tangente em (a,f(a)) é o gráfico de y=f(a)+f'(a)(x-a).
- **Aproximação pela reta tangente**. Para valores de x perto de a,

$$f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a).$$

A expressão f(a)+f'(a)(x-a) é chamada de linearização local de f perto de x=a.

APLICAÇÕES

Regra de L'Hospital. Se f e g são contínuas, f(a)=g(a)=0 e g'(a)≠0, então

Lim$_{x\to}$ f(x)/g(x) = f'(x)/g'(x)

MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS. f tem um *máximo local* em p se f(p) é maior ou igual ao valor de f em todos os pontos próximos a p. f tem um *mínino local* em p se f(p) é menor ou igual ao valor de f em todos os pontos próximos a p.

MÁXIMOS E MÍNIMOS GLOBAIS em um intervalo. f tem um máximo global em p se f(p) é maior ou igual ao valor de f em todos os pontos do intervalo. f tem um mínimo global em p se f(p) é menor ou igual ao valor de f em todos os pontos do intervalo.

PONTO CRÍTICO. Um ponto crítico de uma função f(x) é um ponto no domínio de f onde f'(p)=0 ou f'(p) não está definida.

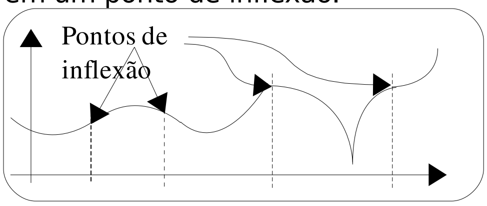
Teorema. Os máximos e mínimos que não ocorrem nos extremos do domínio ocorrem nos pontos críticos.

O TESTE DA PRIMEIRA DERIVADA PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS. a) Se f' troca de sinal em p, de negativa para positiva, então f tem mínimo local em p. b) Se f' troca de sinal em p, de positiva para negativa, então f tem máximo local em p.

O TESTE DA SEGUNDA DERIVADA PARA MÁXIMOS E MÍNIMOS LOCAIS. a) Se f'(p)=0 e f''(p)>0, então f tem um mínimo local em p. b) Se f'(p)=0 e f''(p)<0, então f tem um máximo local em p. c) Se f'(p)=0 e f''(p)=0, nada podemos afirmar.

Para encontrar máximos e mínimos globais de uma função em um intervalo, comparamos os valores de f em todos os pontos críticos do intervalo e os valores de f nos extremos do intervalo (Lim$_{x\to\mp\infty}$ se o intervalo é ilimitado)

Ponto de inflexão de f é um ponto onde o gráfico de f muda de concavidade; f'' é zero ou não está definida em um ponto de inflexão.



Teoremas sobre Derivadas

TEOREMA DE ROLLE

Se uma função é contínua em um intervalo fechado [a,b], derivável no intervalo aberto (a,b) e se f(a)=f(b), então f'(c)=0 para ao menos um número c em (a,b).

Se uma função é contínua em um intervalo fechado [a,b], e se f(a)=f(b), então f tem ao menos um um ponto crítico no intervalo aberto (a,b).

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Se uma função é contínua em um intervalo fechado [a,b], e é diferenciável no intervalo (a,b), então existe um número c em (a,b), tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

Uma função diferenciável é contínua. Se f é diferenciável no ponto x=a, então f é contínua em a.

Obs. Uma função pode ser contínua em um ponto e não ser diferenciável nele.